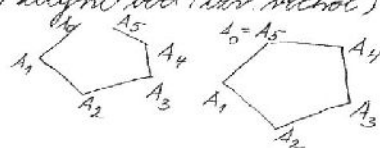


4. Mnohouhelníky, čtyřúhelníky

LOMENÁ ČÁRA $A_0A_1A_2 \dots A_m$ ($m \geq 2$): čára n úseček $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{m-1}A_m$ (konv. strany), každé 2 sousední mají společný právě 1 krajní bod (konv. vrchol) a nikdy v jiné přímce

- **UZAVŘENÁ**: $A_0 = A_m$ ($m > 2$), nepolíná se sama (nesousední úsečky nemají společný bod)

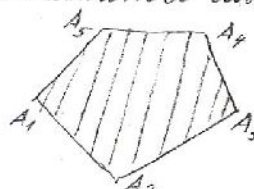


MNOHOÚHELNÍK - část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čarou

- **OBVOD (HRANICE)**: délka lomené čary

- **STRANY**: $a_1, a_2, \dots$ **VRCHOLY**: $A_1, A_2, \dots$

- podle počtu vrcholů **N-ÚHELNÍK** ($n \geq 3 \Rightarrow$ **TRJÚHELNÍK, ČTYŘÚHELNÍK, PĚTÚHELNÍK, ...**)



- **ÚHLOPŘÍČKA**: úsečka s krajními body n 2 nesousedních vrcholů

- pro $n > 3$ (Δ nemá úhlopříčku)

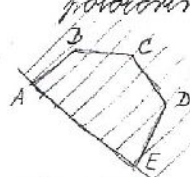
- **POČET ÚHLOPŘÍČEK** n -úhelníku

$$u = \frac{n(n-3)}{2}$$

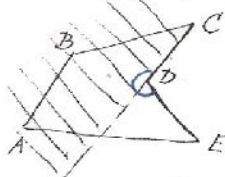
n každého vrcholu ($n-3$) úhlopří.
 $\Rightarrow n$ vrcholů $\dots n(n-3)$, ale
 každá úhlopříčka 2x $\Rightarrow$
 $u = \frac{n(n-3)}{2}$

- **KONVEXNÍ MNOHOÚHELNÍK**: má měř
 a jednu n polokružní úhlopříčku
 kružnicí stranou (konv. OPĚRNÉ
 POLOROVINY)

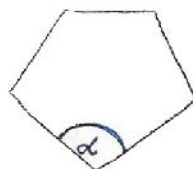
- n přímek n vrcholů úhlopříček
 polokružní



konvexní



nekonvexní



čtyřúhelník
 n vrcholů 1 úhl.

$$u = \frac{4 \cdot 4(4-3)}{2}$$

$$u = 2$$



pětiúhelník
 n vrcholů 2 úhl.

$$u = \frac{5 \cdot 5(5-3)}{2}$$

$$u = 5$$



šestiúhelník
 n vrcholů 3 úhl.

$$u = \frac{6 \cdot 6(6-3)}{2}$$

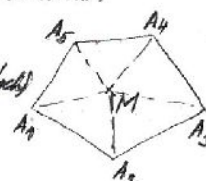
$$u = 9$$

VNITŘNÍ ÚHEL konvex. mnoh. :
 průnik opěrných polokružní
 půlkružnic 2 sousedních
 stran (měřeny vnitřní
 úhly konvexní)

- **SOUČET VELIKOSTÍ VNITŘ. ÚHLŮ**
 (konvex. mnoh.)

$$\Sigma \alpha = (n-2) \cdot 180^\circ$$

obdobně:



$M \dots$ vnitřní bod
 $\Rightarrow$ vznik n trojúheln.
 s vrcholem M

$$\Rightarrow \Sigma \alpha = n \cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow n \cdot n \text{ úhl. } \Sigma \alpha = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$$

(mnoho odčítá součet $\times$ při vrcholem M)

$$\Sigma \alpha = (n-2) \cdot 180^\circ$$

- **PRAVIDELNÉ N-ÚHELNÍKY**

- všechny strany i vnitřní úhly stejné
- lze je opsat i vepsat kružnicí
- lze rozložit na n rovnostranných Δ



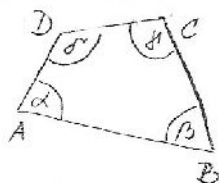
$$O = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

α ($\varphi = \varphi_0$, $\kappa =$ rameno Δ)

- konstrukce: kruž. a prav. - viz příklady
 $\varphi \dots$ poloměr kruž. vpramě $\kappa \dots$ poloměr kruž. opamě

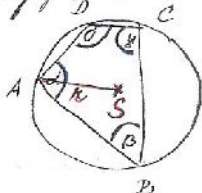
ČTYŘÚHELNÍKY



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

- TĚTIVOVÝ

lze mu opsat kružnici
stejný úhel úhly v kružnici

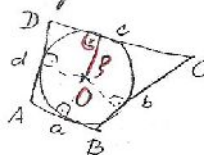


$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

např.: obdélník, kosmokranní lichob.

- TEČNOVÝ

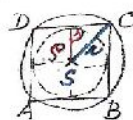
lze mu opsat k
stejný úhly v tečnách



např.: kosoúhelník, deltoid

- DVOUTŘEDOVÝ

lze mu opsat i
opsat kružnici



např.: čtverec

- RŮZNOBĚŽNÍKY

- má dvě rovnoběžné strany

- LICHOBĚŽNÍKY

- jedna dvojice protějších stran rovnoběžná
= rovnoběžník (a, c)

- druhá dvojice protějších stran rovnoběžná
= rovnoběžník (b, d)

- STŘEDNÍ PRŮČKA: úsečka spojující středy stran

$$p = \frac{a+c}{2} \quad \text{pro } a \parallel c$$

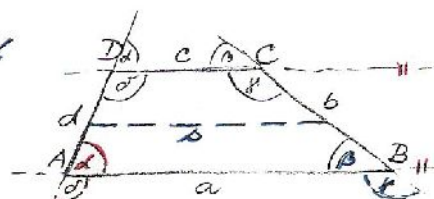
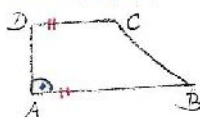
- ROVNORAHENNÝ



$$b = d$$

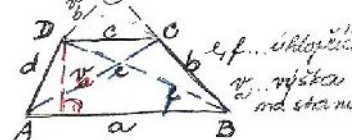
$$a \parallel c$$

- PRAVOÚHLÝ



$$\alpha + \delta = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$



- ROVNOBĚŽNÍKY

- obě dvojice protějších stran rovnoběžné

- protější strany a úhly shodné

- úhlopříčky se půlí

- podle velikosti vnitřních úhlů:

- PRAVOÚHLÝ, KOSOÚHLÝ

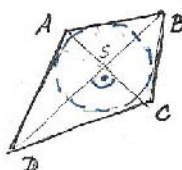
- podle délek stran:

- ROVNOSTRANNÍ, ROVNORAHENNÝ

- DELTOID

- úhlopříčky kolmé, jedna
prochází středem druhé

- lze mu opsat kružnici

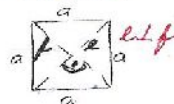


$AC \perp BD$
S středem AC

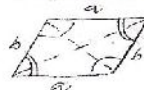
- OBDELNÍK (pravoúhlý rovnoběžník)



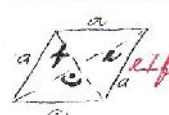
- ČTVEREC



- KOSODÉLNÍK



- KOSODČEREC



Příklady

- 1.72 ① Kolik konvenů m -úhelníků má dvadvať ná úhlopříček než stran?
- počet úhlopříček $u = \frac{1}{2}n(n-3)$ n stran n -úhelník $\Rightarrow n$ stran

$$\frac{1}{2}n(n-3) = 2n \quad | \cdot 2$$

$$n(n-3) = 4n$$

$$n^2 - 3n = 4n$$

$$n^2 - 4n = 0$$

$$n(n-4) = 0$$

$$n_1 = 0$$

nulový

$$n_2 = 4$$

čtyřúhelník

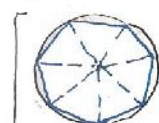
- 1.74 ② Kolik mnohoúhelníků má pravidelný m -úhelník, jehož všechny vnější úhly mají velikost 144° [vnějš. čtyřúhelník 144° - pravidelný]

$$\rho_x = n \cdot \rho_x - 360^\circ$$

$$1440^\circ = 180^\circ n - 360^\circ$$

$$180^\circ n = 1800^\circ$$

$$n = 10$$



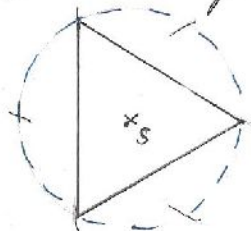
ná stran - odn.

$$\rho_x = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$$

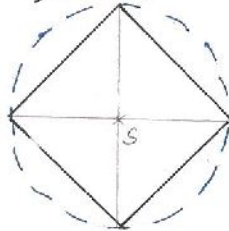
$$\rho_x = 180^\circ (n - 2)$$

- ③ Je dáná kružnice $k(S, r)$. Napište do ní

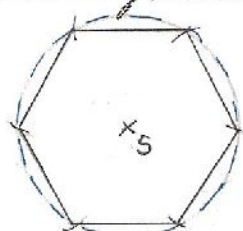
a) rovnoběžný Δ



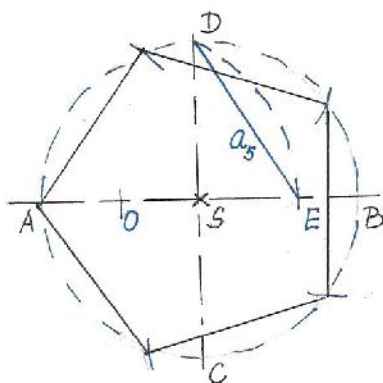
b) čtverec



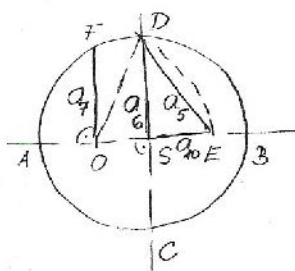
c) pravidelný šestiúhelník



d) pravidelný pětiúhelník



e) přibližnou metodou pravidelný sedmiúhelník



$AB \perp CD$ proch. S

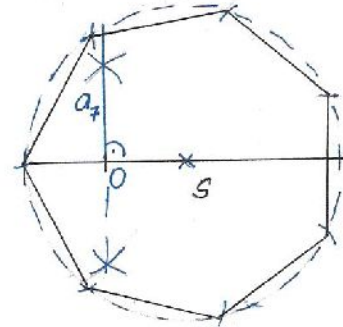
O ... střed AS

$E, E \in SB \cap k$
! $k(O, |OD|)$

$$a_5 = |DE| \quad a_6 = |SE|$$

$$a_6 = |DS|$$

$$a_7 = |OF|$$

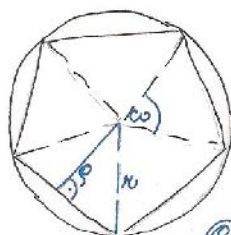


PRO $m \leq 20$ lze konvulsem/ sestavit všechny m -úhelníky ($m \geq 3$) **NIMO**

$m = 7, 9, 11, 13, 15, 17$

(pouze přibližnou metodou)

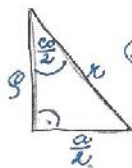
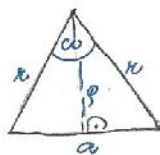
- ④ Všechny poloměry kružnic jsou a vpravo je pravidelnost
a) pětiúhelník, p -ti délkou strany $a = 10 \text{ cm}$



5 normotam. Δ

$$\textcircled{1} \lg \frac{\omega}{2} = \frac{2}{5}$$

$$S = \frac{a}{\lg 2} = \frac{5}{\lg 36} = 6.9 \text{ cm}$$



$$\omega = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \Rightarrow \frac{\omega}{2} = 36^\circ$$

$$\textcircled{2} \sin \frac{\omega}{2} = \frac{p/2}{r}$$

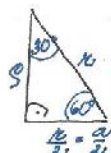
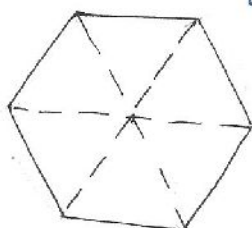
$$r \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a}{2}$$

$$r = \frac{a/2}{\sin \frac{\omega}{2}} = \frac{5}{\sin 36^\circ} = 8.5 \text{ cm}$$

- b) šestiúhelník, p -ti délkou strany $a = 10 \text{ cm}$

6 normotam. Δ

$$\omega = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \Rightarrow \text{úhly při každém kóli } 60^\circ \Rightarrow \text{ROVNOSTRANNÝ Δ}$$



$$\textcircled{1} r = a = 10 \text{ cm}$$

$$\textcircled{2} \lg 60^\circ = \frac{p}{a}$$

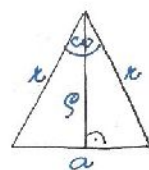
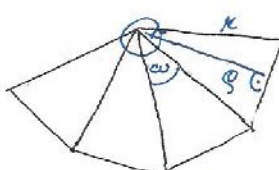
$$p = \frac{a}{2} \lg 60^\circ = \frac{10}{2} \lg 60^\circ = 5 \lg 60^\circ = 5 \cdot 1.3 = 8.4 \text{ cm}$$

$$p = 5 \lg 60^\circ = 5 \cdot 1.3 = 8.4 \text{ cm}$$

- c) desetiúhelník, p -ti délkou strany $a = 10 \text{ cm}$

24

10 normotam. Δ



$$\textcircled{1} \lg \frac{\omega}{2} = \frac{2}{10}$$

$$S = \frac{a}{\lg 2}$$

$$S = \frac{5}{\lg 18^\circ}$$

$$p = 15.4 \text{ cm}$$

$$\textcircled{2} \sin \frac{\omega}{2} = \frac{p/2}{r}$$

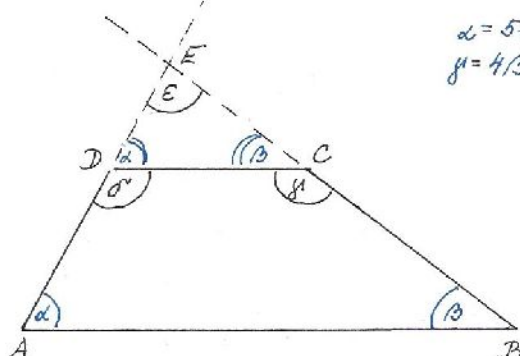
$$r = \frac{p/2}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$r = \frac{5}{\sin 18^\circ}$$

$$r = 16.2 \text{ cm}$$

- ⑤ V lichoběžníku ABCD ($AB \parallel CD$) je $\angle A = 57^\circ$, $\angle C = 4/3 \angle B$.

179 Všechny vnější úhly lichoběžníka a úhel E.



$$\alpha = 57^\circ$$

$$\gamma = 4/3$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

$$\alpha + \delta = 180^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 57^\circ$$

$$\delta = 123^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + 4/3 = 180^\circ$$

$$5/3 = 180^\circ$$

$$\beta = 36^\circ \Rightarrow$$

$$\gamma = 4/3$$

$$\gamma = 4 \cdot 36^\circ$$

$$\gamma = 144^\circ$$

$$\textcircled{1} \Delta DCE (\text{mno } \Delta ADE)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$E = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$E = 180^\circ - (57^\circ + 36^\circ)$$

$$E = 180^\circ - 93^\circ$$

$$E = 87^\circ$$